

層流・乱流転移と有向パーコレーション相転移

佐野 雅己

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

1. はじめに

層流がどのように乱流に遷移するかを明らかにすることは、レイノルズ以降、長年研究されてきた難問であるが、最近再び研究者の関心を集めている。その理由の一つは、層流乱流転移が統計力学モデルにおける有向パーコレーション (Directed Percolation 略して DP) 転移であるという予想を確認するための実験やシミュレーションが最近相次いで発表されたことに起因している¹⁾。20 世紀の終わりに、レーリー・ベナール対流においてカオスへの転移が発見され、決定論的方程式における予測不能な運動形態としてのカオスが、流体乱流の起源の一つであることが理解されるに至った。しかし、カオスの発生は時間的な乱れを説明するものの、時空間的な乱れである乱流に直ちにつながるものではない。実際、パイプ流においては、線形解析では $Re=\infty$ まで安定であるにもかかわらず、有限の摂動により $Re=2000$ 程度で乱流化することが知られており²⁾、同様のことは平面クエット流やテーラー・クエット流でも起こることが知られている。すなわち、これらの流れにおける乱流の起源を捉えるには、有限振幅の摂動を考慮する必要があり、理論的解析には大きな困難が伴う。しかし、実験や数値実験による探求は可能であり、層流乱流転移が連続転移なのか、不連続転移なのか、またそこに普遍的な法則があるのかどうかを巡って現在盛んに研究が行われている。本講演では最近の結果も含めてその一端を紹介したい。

2. パイプ流と DP 転移の可能性

実験や数値計算では、線形安定な領域でも局在した乱流構造 (例えば、パイプ流におけるパフなど) が存在することや、乱れが時空間欠的に広がることなどが知られている。これらの局在した乱流構造を粗視化してその振る舞いを見ると、図 1 に示すように、DP 転移を示すコンタクトプロセスと呼ばれる確率モデルとの対応関係が成り立つように見える。ここでは、流れに乗った座標で見て、パフのサイズ程度の幅を格子 1 つ分として、空間を 1 次元と見なす粗視化を行っている。乱流領域を活性状態、層流領域を非活性状態として、活性状態は確率的に隣のサイトに広がったり (感染確率とも呼ばれる)、消滅したりするものとしよう。非活性状態が勝手に活性状態になる確率は 0 とすると、一度全体が非活性状態になると、2 度と活性状態が現れることはない。このため、全てが非活性状態になった状態を吸収状態と呼ぶ。

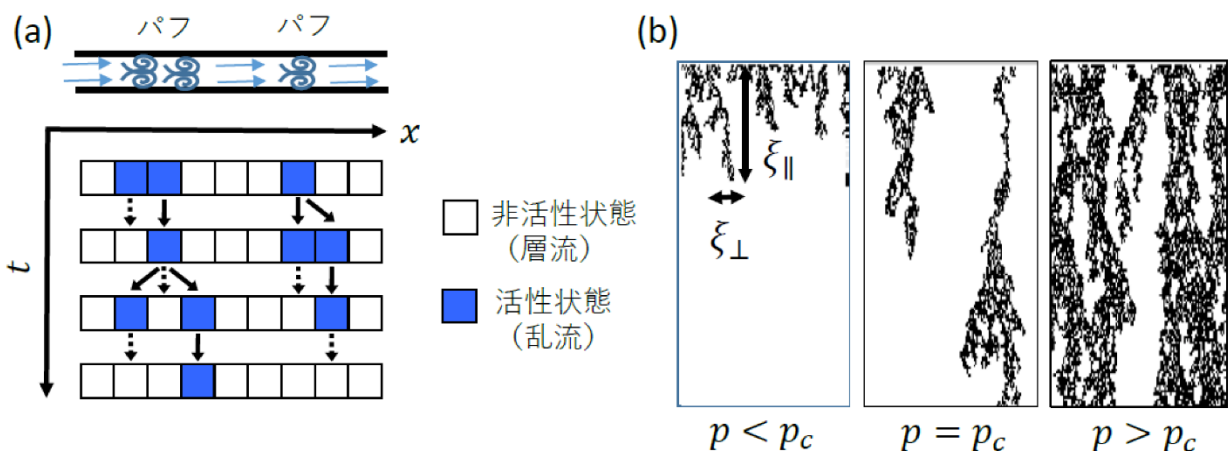


図 1 (a)パイプ流のパフと DP 転移のモデル

(b)コンタクトプロセスによるシミュレーション

このモデルで全体が活性状態の初期条件からスタートして、徐々に感染確率 p を下げてゆくと、活性状態の密度（オーダーパラメータと呼ぶ）は連続的に0に転移する。このとき、転移点からの距離を $\varepsilon = p - p_c$ と表すと次のようなべき乗測に従い、相関時間 $\xi_{\parallel}$ や相関長 $\xi_{\perp}$ は転移点で発散することが知られている。

$$\rho \sim \varepsilon^{\beta}, \quad \xi_{\parallel} \sim \varepsilon^{-\nu_{\parallel}}, \quad \xi_{\perp} \sim \varepsilon^{-\nu_{\perp}} \quad (1)$$

この時、臨界指数 β や $\nu_{\parallel}, \nu_{\perp}$ は、モデルや系の詳細によらず次元のみに依存する普遍的な値となる³⁾。

このような DP 普遍性がなりたつための条件は何であろうか？今のところ、(i) 吸収状態が1つだけであること、(ii) その系が保存量など他の対称性を持たないこと、(iii) 長距離相関を持たないことなどが同じ普遍法則に従うための条件と考えられている。では、層流乱流転移でこの条件は成り立っているであろうか？上で述べたシア流のある場合の層流乱流転移では、層流状態は線形安定であるため、一旦層流状態になると有限の攪乱を与えない限り乱流は生じないため、層流状態は吸収状態と見なすことができる。もし、長距離相関がなく、パフの分裂や消滅が確率的ならば、パイプ流は、空間1次元時間1次元（(1+1)次元と呼ぶ）の DP になっている可能性がある。ここで問題となるのは、層流状態が唯一の吸収状態となり得るかである。パイプ流では、パイプを有限の長さとして、周期的境界条件のもとで調べると、複数の周期解が存在することが知られている（図2）。これらの周期解は、パフと似た構造を持ち、実験で得られたパフの構造と周期解の構造はよく似ている。これら周期解は Re が 1500 程度までは存在することが知られており、パイプ流における層流乱流転移が $Re \sim 2040$ 付近で起こることと一見矛盾するようにも見える。しかし、有限の長さのパイプでは周期解が不安定となる可能性もあり、また DP 転移は1つのパフの振る舞いではなく、多数のパフの集団としての振る舞いに関するものであるため、DP の転移点以下で有限振幅解が存在していること自体は、DP の存在と矛盾するものではない。これらの周期解が何らかの原因で消滅するならば、層流状態は唯一の吸収状態となりうる。

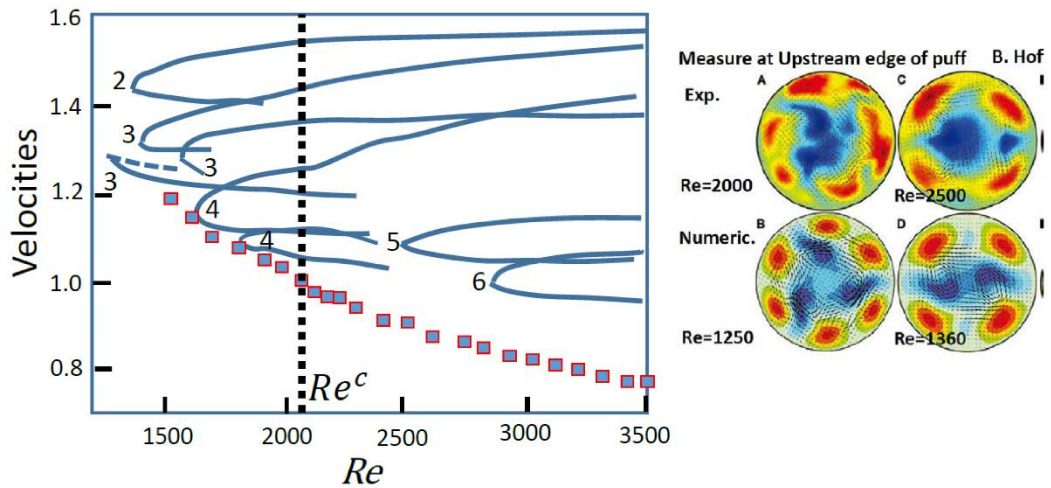


図2 パイプ流での異なる周期解の分岐図と層流乱流転移点 ($Re \sim 2040$) の関係（文献 4, 5 を改変）

では、(1) 式のような臨界現象の普遍法則をパイプ流で測定することは可能だろうか？パフの典型的な間隔は、パイプの直径を D としたとき、 $10D$ 程度であるので、仮に 1000 個のパフを同時にパイプ内で観測可能な長さと考え、 $10^4 D$ 程度の長さ（ $D=4\text{mm}$ とすると 40m ）があれば良いと見積もられるが、事はそう簡単ではない。B. Hof 等の観測によれば、1つのパフが消滅するまでの平均寿命と1つのパフが2つ分裂するまでの平均時間はともに Re^c に向かって2重指数関数的に急激に増大し、臨界点と見なされる $Re^c = 2040$ 近辺では、ほぼ等しい値を取り、およそ $10^7 \times (D/U)$ と評価されている²⁾。これは、速度 U でパフが伝搬することを考えると $L = 10^7 D$ （ $D=4\text{mm}$ とすると 40km !）

に相当するため、パフが確率的に生成消滅を起こす過程を観察しようとするならば、さらにその 100 倍程度 (4000km) 程度の長さのパイプが必要となることが分かり、実験での観測は難しいと言わざるを得ない。

3. チャネル流における DP 転移の可能性

それでは、他の幾何学的形状や境界条件をもつ流れにおいて DP 転移が観測される可能性はないだろうか？我々は、チャネル流 (ダクト流) での観測可能性を検討した。チャネル流は断面が長方形であるが、準 2 次元的でなるべくシステムサイズを大きく取るため、ギャップ幅(2h)をできるだけ小さく選び、スパン方向(W)や流れの方向の長さ(L)を実験室で可能な限り大きく取ることを考え、 $h = 2.5\text{mm}$ とし、 $2,352h \times 2h \times 360h$ とこれまで報告されているものの中でも最大のシステムサイズを持つチャネル流装置を製作し実験を行った。DP 転移かどうかを調べるには、全体が乱流状態という初期条件から出発して、レイノルズ数まで下げて減衰または飽和を見るクエンチ実験や、局所的に乱流を励起してその後の広がり方を見るスプレディング実験などが数値計算では一般的だが、どちらも相当多くの回数の繰り返し実験を必要とする。また、チャネル流やパイプ流のような開放流れでは、乱れは流れとともに下流へ伝搬し、遂には装置から出てしまうため、局在乱流状態の観測時間にも制限が伴う。そのためここでは、入口にグリッドを設けて乱流状態を作り出し、その乱流状態が途中で減衰してしまうのか、あるいは装置の下流まで生き残るのかという遷移を見ることにした。このやり方は、Active Wall 境界条件と呼ばれ、臨界現象の研究では表面からのオーダーパラメータの侵入を見る表面臨界現象の手法として古くから知られているが、DP の実験で試されたことはない。さらに今の場合は、流体全体が流れているため、移流のある特殊な条件となる。しかし、この手法には乱流を何度も励起してその伝搬の平均を取るという操作が不要であり、定常状態を観測するだけで全ての臨界指数が測定できるというメリットがある。例えば、入口で活性状態を作ってやると、オーダーパラメータは、臨界点以下では距離とともに指数関数的に減衰し、臨界点以上では一定値に飽和し、臨界点では、べき的に減衰するものと予想される。

$$\rho(x) \sim \begin{cases} \varepsilon^\beta & (\varepsilon > 0) \\ x^{-\alpha_{\parallel}} & (\varepsilon = 0) \\ e^{-x/\xi_{\parallel}} & (\varepsilon < 0) \end{cases} \quad (2)$$

ただし、ここで $\alpha_{\parallel} = \beta/\nu_{\parallel}$ である。チャネル流が空間 2 次元、時間 1 次元の(2+1)次元 DP であれば、 $\alpha_{\parallel} = 0.451$ である。また、臨界点直下で $\xi_{\parallel}$ が増大し、減衰が遅くなる振舞いから $\nu_{\parallel}$ が求まる。もし、パイプ流が(1+1)次元の DP であれば、空間 1 次元の場合は $\alpha_{\parallel} = 0.1749$ であるので、オーダーパラメータ ρ が 1 桁変化することを見るためには、 x を約 6 桁も変化させる必要があり、パフの最小間隔を

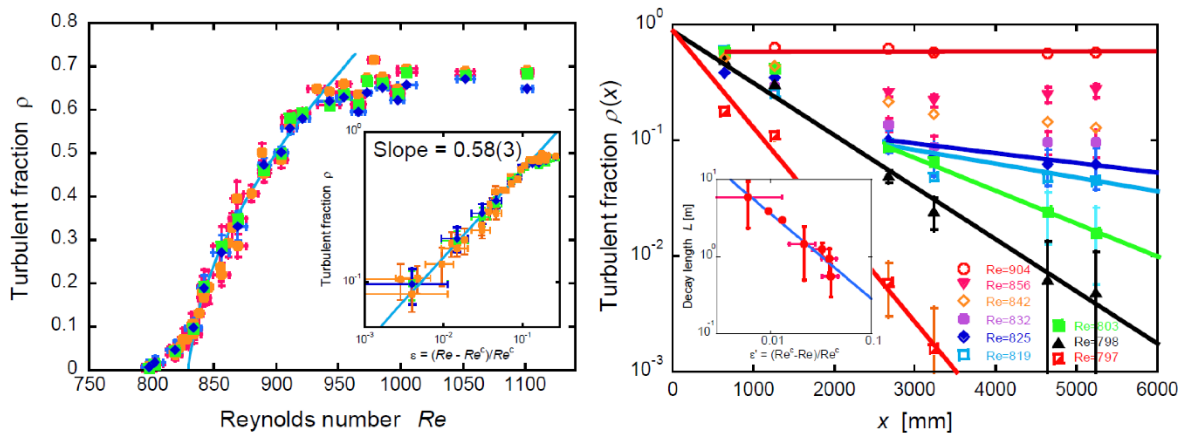


図3 左：チャネル流におけるオーダーパラメータ ρ の Re 依存性、右： ρ の空間依存性

10D 程度とすると、やはり $L = 10^7 D$ 程度の長さのパイプが必要となり、パイプ流での計測はこの手法でも難しいことが分かる。一方、(2+1)次元 DP では臨界指数が 1 次元より大きいため、 ρ が 1 桁変化することを見るためには、 x は 2 桁変化させれば良い。また、チャンネル流では、局在した乱流構造である Turbulent Spot が実験で観測されており、その大きさは約 100h 程度と報告されているので、チャンネルの長さとしては、 $L = 10^4 D$ 程度あれば良いため、この観点からは実現可能な実験と考えられることから、今回の実験を計画するに至った。実際に我々は、液晶を用いた DP の実験とセルオートマトンの数値シミュレーションにおいて、上流を活性状態にして、全体を流した状態で、(2) 式の振る舞いが再現されることを確認している^{6,7,8)}。

チャンネル流の実験では、入口の手前にグリッドを挿入し、全体が乱流化する境界条件を設定し、その乱流状態の割合が下流に行くにつれ減衰するののか飽和するののかを観測した。十分下流でオーダーパラメータとしての乱流割合 ρ を測定したものが、図 3 左である。 ρ が Re とともに連続的に変化しているのが分かる。 $\rho \sim (Re - Re^c)^\beta$ でフィットすると、 $Re^c = 830(4)$, $\beta = 0.58(3)$ が得られる⁸⁾。図 3 (b) は、 ρ の空間変化である。 Re^c 以下では、(2) 式のように指数関数的に減衰し、その減衰長から $\nu_{\parallel} = 1.1(3)$ が得られる。さらに、十分下流で定点観測を行い、層流が観測される時間間隔を測定すると次の振る舞いが期待される。

$$N(\tau) \sim \begin{cases} \tau^{-\mu_{\perp}} & (\tau \ll \xi) \\ e^{-\tau/\xi} & (\tau \gg \xi) \end{cases}, \quad \xi \sim \varepsilon^{-\nu_{\perp}} \quad (3)$$

図 4A-C にその結果を示す。また、 $N(\tau)$ を確率分布 $P(\tau)$ に直すと、臨界点近傍で普遍的なスケーリング関数 $g(\varepsilon^{\nu_{\perp}} \tau)$ の存在を仮定すると、 $P(\tau) \sim \varepsilon^{\nu_{\perp}(\mu_{\perp}-1)} g(\varepsilon^{\nu_{\perp}} \tau)$ が成り立つことから、異なる Re 数

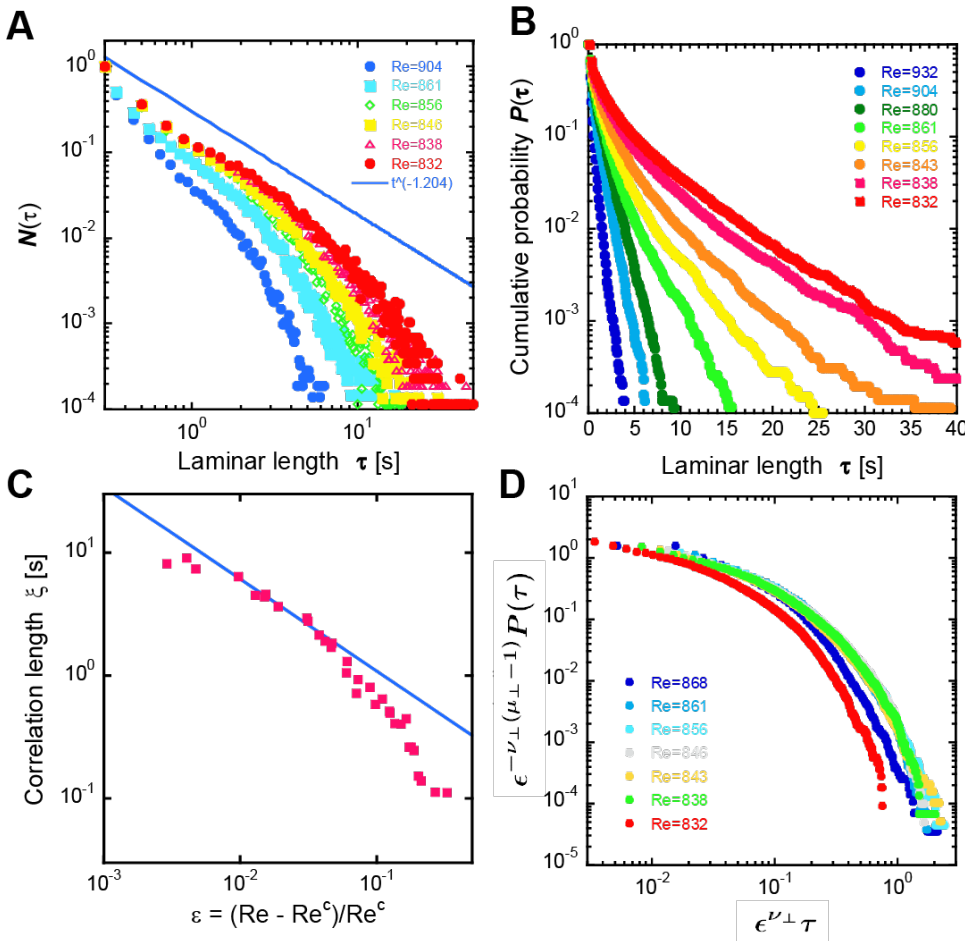


図 4 チャンネル流におけるラミナー間隔分布（定点測定）

で測定した複数の曲線が1つの普遍的な関数に重なることが期待される。
 実際、臨界指数の理論値を用いるとフィッティングパラメータなしで、図 4D のように複数の Re 数で普遍的なスケーリング関数に重なることが分かる。

測定により実験で得られた臨界指数と理論的に知られている値を比較した表を以下に示す。このように、(2+1)次元 DP の理論的な臨界指数と実験誤差の範囲で一致していることが分かる⁸⁾。

(2+1)D System				
Channel Flow (present exp.)	0.58(3)	0.72(5)	1.25(3)	1.1(3)
DP Theory	0.583(3)	0.733(3)	1.204(2)	1.295(6)

表 1 実験で得られた臨界指数と理論値の比較

4. Turbulent Stripe 解に関する数値シミュレーション結果との比較と考察

以上のようなチャンネル流の実験結果に関連して、その後、複数の数値シミュレーションが行われ、 $Re^c = 830$ よりも低い Re で、Turbulent Stripe と呼ばれる、非常にゆっくりと成長する斜めのストライプ状の構造を持つ局在乱流解が存在するらしいことが明らかになってきた⁹⁾。

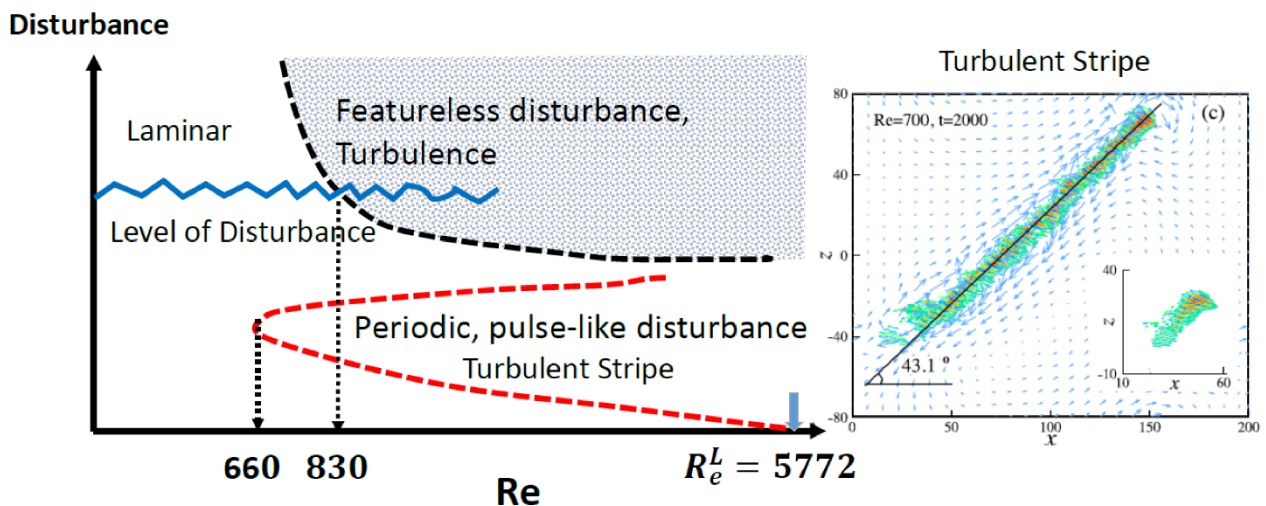


図 5 左：チャンネル流における摂動のタイプと分岐図

右：局在乱流構造（数値計算⁹⁾）

この Turbulent Stripe 構造は、数値計算では span 方向、stream 方向とも周期境界条件の時に、 $10^6(h/U)$ 程度の時間スケールで現れ、 $Re = 660$ 程度で消滅する。また、Hof 等の実験によれば、周期パルス的で、面に垂直な渦度を積極的に作り出すような摂動を与えることで励起可能である。この局在乱流解が実験でも $Re = 660$ まで生き残るとすれば、吸収状態が2つあることになり、DP 転移とは矛盾するとの指摘がある。以下に、この指摘に関して考えられる反論を列挙する。

- (1) DP 臨界点より低い Re においても局在乱流を励起できることは、DP 仮説と矛盾しない。
- (2) Span 方向に関して周期境界条件ではない実験系では、Stripe は壁の鏡像と衝突して消滅するため、最終的にはなくなり、層流状態1つだけが吸収状態となる。
- (3) Hof の実験では周期的にパルスのような摂動を与えており、それはパイプ流においてパフの周期解を強制的に励起することに相当している。パイプ流においても孤立したパフは臨界以下では最

最終的に消滅することが知られている。

- (4) 数値計算においても、初期条件を全体が乱れた Featureless Turbulence 状態とすると、高い Re 数でも減衰してしまい、十分高い Re で初めて乱流が生き残ることが知られており、初期条件が Featureless Turbulence では Turbulent Stripe を励起することは難しい。

以上のような理由からグリッド使った我々の実験で DP 転移らしきものが観測されたことは、数値実験の結果と矛盾するものではないと言える。論点を整理するため、摂動の強さ（種類）による分岐図を Re に対してプロットすると、図 5 左のような状況になっているものと推察することができる。実験では、span 方向に周期的なチャンネル流は存在しないことと考え合わせると、初期条件が Featureless Turbulence 状態の場合には、乱流状態が長距離相関を持たなければ、DP 転移が観測されても不思議ではない。とは言え、長寿命の Turbulent Stripe が成長しうることを考えると、それは一旦励起されれば長距離相互作用の原因となるため、その性質を詳しく調べることには意義がある。実験的にもシミュレーションでも更なる探求が必要であろう。一方、チャンネル流実験では、観測時間に限界があることや span 方向の境界条件が固定境界条件となるため、数値実験との比較にはどうしても限界がある。そのため、他の実験系で DP 転移の可能性を探ることも必要と考えられる。

5. 他の流れにおける DP 転移観測の可能性

以上述べてきたような実験結果と考察から、今後、他の流れにおいて DP 転移を観測する試みについて試論を述べる。Hof 達は、ギャップ幅を $2h$ とすると、高さが $16h$ 、周長が約 $3000h$ という浅いテーラー・クエット流の実験を行い、これを準 1 次元系と見なしてデータ解析することにより、(1+1)次元 DP の 4 つの臨界指数と良く一致する結果を得た。これは、円周方向に周期境界条件とすることにより、長時間の振る舞いを観察できたことやシステムサイズが大きいことが功を奏した結果であると考えられる。一方、通常の高さのテーラー・クエット流で(2+1)次元の DP 転移を観測することにはまだ誰も成功していない。ここでも、Spiral Turbulence のような Turbulent stripe に似た構造が現れ、その長距離相関が消えないと DP 転移を観測することは難しいかもしれないが、ギャップ幅を 500 ミクロン程度に小さくし、周長、高さともに 3000 以上にとった大きなシステムサイズでの実験を行うことが強く期待される。また、span 方向の周期境界条件や固定境界条件の違いを実験で確かめることのできる系として、最近、塚原等¹⁰⁾が提案している、円環クエット流や円環ポアズイユ流の実験系は期待が持てる。この系では、内外の同心円筒の間に流体を閉じ込め、内部の円筒を平行移動させるか、円環内に圧力をかけるかしてレイノルズ数を制御して層流乱流転移を見ることになる。塚原等によれば、円周方向の周期性境界条件を 2π から 16π にすることでヘリカルな乱流 stripe をできにくくすると DP 転移が見られることが報告されている¹⁰⁾。実験系では、円環内に入れる仕切りのあるなしで、固定境界条件と周期境界条件の違いを調べることができるので、この実験系で DP 転移が観測されるかどうかを調べることも有望な実験となり得る。講演では最近の結果も紹介したい。

References

- [1] Nature Physics., 12 (2016)における特集記事.
- [2] K. Avila, D. Moxey, A. de Lozar, M. Avila, D. Barkley, B. Hof, Science, 333, 192 (2011).
- [3] H. Hinrichsen, Advances in Physics, 49, 815 (2000).
- [4] B. Hof, et al., Phys. Rev. Lett. 95, 214502 (2005).
- [5] H. Wedwin and R.R. Kerswel, J. Fluid Mech. 508, 333 (2004).
- [6] K.A. Takeuchi, M. Kuroda, H. Chaté, and M. Sano, Phys. Rev. Lett. 99, 234503 (2007), Phys. Rev. E 80, 051116 (2009).
- [7] H. Ohnuma, M. Kuroda, and M. Sano, in preparation (2017).
- [8] M. Sano and K. Tamai, Nature Physics, 12, 249 (2016).
- [9] X. Xiong et al., Physics of Fluids, 27, 041702 (2015).
- [10] T. Tsukahara, private communication.